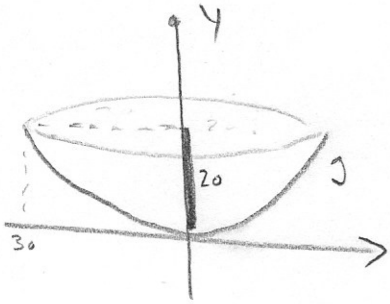
Übung 1 S. 219

Wir wollen das Volumen von folgendem Gefäss berechnen. Hierfür benutzen wir den Ansatz $f(x) = a\sqrt{x}$.



Eigentlich wäre es eine Parabel

$$g(x) = b\,x^2$$

$$y = b\,x^2$$

da wir aber um die x-Achse drehen wollen müssen wir die Umkehrfunktion berechnen.

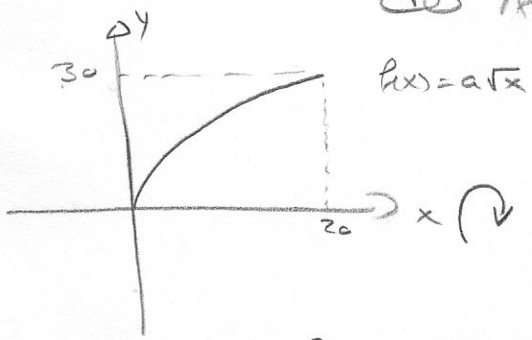
$$\frac{1}{b}y = x^2 \quad |\sqrt{\ }$$

$$\pm \underbrace{\sqrt{\tfrac{1}{b}}}_{=a}\sqrt{y} = x$$

wir benutzen wie in der 5ten Klasse die +-Funktion.
Und wir vertauschen die Achsen
$x \longleftrightarrow y$

$$\bar{g}(x) = y = a\sqrt{x}$$

$\Rightarrow$ darum wird hier in der Aufgabe der Ansatz $f(x) = a\sqrt{x}$ vorgeschlagen.



Um den Parameter a zu berechne benutzen wir die Information

$$f(20) = 30 \Rightarrow 30 = a\sqrt{20}$$

$$a = \frac{30}{\sqrt{20}} = \frac{30\sqrt{20}}{20} = \frac{3}{2}\sqrt{20}$$

$$= \frac{3}{2}2\sqrt{5} = 3\sqrt{5}$$

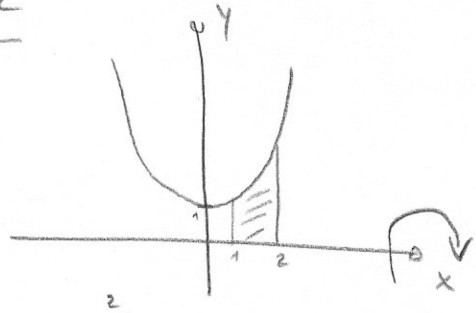
$$\Rightarrow f(x) = 3\sqrt{5}\sqrt{x}$$

$$V = \pi \int_0^{20} f^2(x)\,dx = \pi \int_0^{20} 45x\,dx = \pi \left[\frac{45}{2}x^2\right]_0^{20}$$

$$= \pi\left(\frac{45}{2}20^2 - 0\right) = 9000\pi \approx 28274.33\,cm^3 \approx \underline{\underline{28.3\,dm^3}}$$

Übung 2

S. 220



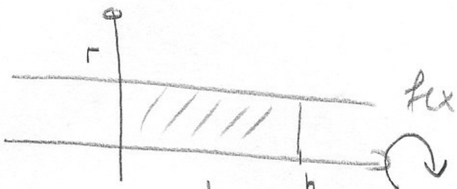
Rotation um die x-Achse

$$V = \pi \int_1^2 f^2(x)\,dx = \pi \int_1^2 (x^2+1)^2\,dx = \pi \int_1^2 (x^4+2x^2+1)\,dx$$

$$= \pi \left[\underbrace{\tfrac{1}{5}x^5 + \tfrac{2}{3}x^3 + x}_{H} \right]_1^2 = \pi \left[H(2) - H(1) \right]$$

$$= \pi \left(\tfrac{32}{5} + \tfrac{16}{3} + 2 - \tfrac{1}{5} - \tfrac{2}{3} - 1 \right) = \tfrac{178}{15}\pi \approx 37.28\,\text{VE}$$

Übung 3



$f(x) = r$

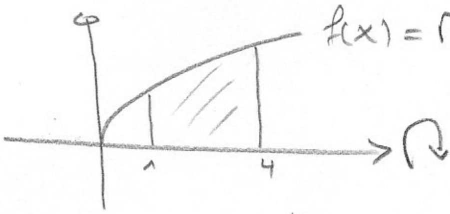
Rotation um die x-Achse

$$V = \pi \int_0^h f^2(x)\,dx = \pi \int_0^h r^2\,dx = \pi \left[r^2 x \right]_0^h = \pi(r^2 h - 0) = \pi r^2 h$$

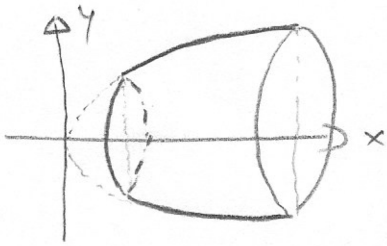
$$V_{\text{Zylinder}} = \pi r^2 h$$

Übung 4a

S. 222



$f(x) = \sqrt{x}$



$$V = \pi \int_1^4 f^2(x)\,dx = \pi \int_1^4 x\,dx$$

$$= \pi \left[\tfrac{1}{2}x^2 \right]_1^4 = \pi \left(8 - \tfrac{1}{2} \right) = 7.5\pi \approx 23.56\,\text{VE}$$