C. Integration durch Teilbruchzerlegung

Man kann zeigen, dass jede gebrochen-rationale Funktion auf ihrer Definitionsmenge integrierbar ist, d.h. eine Stammfunktion besitzt. Die Berechnung einer solchen Stammfunktion kann mit der Methode der sogenannten **Teilbruchzerlegung** erfolgen.

Typ 1: Der Nenner des Integranden hat nur einfache reelle Nullstellen.

Beispiel: Gegeben sei die gebrochen-rationale Funktion zu $f(x) = \frac{7x-1}{(x-3)(2x+4)}$, $x \neq 3$, $x \neq -2$.

a) Zerlegen Sie den Funktionsterm von f in **Teilbrüche**, d.h., stellen Sie ihn in der Gestalt $f(x) = \frac{a}{x-3} + \frac{b}{2x+4}$ dar.

b) Bestimmen Sie eine Stammfunktion von f.

Lösung zu a):
Für die Zerlegung von f in Teilbrüche, deren Nenner die Linearfaktoren des Nenners von f sind, gehen wir von nebenstehender Ansatzgleichung aus.

Ansatz für eine Teilbruchzerlegung von f:

$$\frac{7x-1}{(x-3)(2x+4)} = \frac{a}{x-3} + \frac{b}{2x+4}$$

Wir multiplizieren beide Seiten dieser Gleichung mit dem Hauptnenner, also mit dem Term (x–3)(2x+4).

Multiplikation mit (x–3)(2x+4):

$$7x-1 = a(2x+4) + b(x-3)$$

Anschließend ordnen wir die rechte Seite der so entstehenden Gleichung durch Zusammenfassung derjenigen Terme, die die Variable x enthalten.

Ordnen nach Potenzen von x:

$$7x-1 = (2a+b)x + (4a-3b)$$

Rechts und links des Gleichheitszeichens steht nun jeweils ein linearer Term.
Da die entsprechenden Koeffizienten rechts und links übereinstimmen müssen, ergibt sich ein lineares Gleichungssystem.
Dieses besitzt die Lösungen $a = 2$, $b = 3$.

Koeffizientenvergleich:

$$7 = 2a+b$$
$$-1 = 4a-3b$$

Lösung des lin. Gleichungssystems:

$$a = 2\,,\quad b = 3$$

Damit ergibt sich die nebenstehende Teilbruchzerlegung von f.

Teilbruchzerlegung von f:

$$f(x) = \frac{2}{x-3} + \frac{3}{2x+4}$$

Lösung zu b):
Die beiden Teilbrüche, in die wir den Funktionsterm von f zerlegt haben, lassen sich nun mit Hilfe der logarithmischen Integration* integrieren.

Stammfunktion von f:

$$f(x) = 2\cdot\frac{1}{x-3} + \frac{3}{2}\cdot\frac{2}{2x+4}$$

$$F(x) = 2\cdot\ln|x-3| + \frac{3}{2}\cdot\ln|2x+4| + C$$

---

* logarithmische Integration: $\int \frac{h'(x)}{h(x)}dx = \ln|h(x)| + C$

Übung 16

Gegeben seien die Funktionen zu $f(x)=\frac{11x-1}{(3x-1)(x+1)}$, $g(x)=\frac{22x+7}{(x+1)(4x+1)}$ und $h(x)=\frac{10x-4}{x(2x-1)}$.

a) Zerlegen Sie die Funktionsterme von f, g und h in Teilbrüche.

b) Bestimmen Sie jeweils eine Stammfunktion von f, g und h.

Typ 2: Der Nenner des Integranden hat mehrfache Nullstellen.

Tritt ein Linearfaktor in der Zerlegung des Nenners einer gebrochen-rationalen Funktion mehrfach auf, so ist der Ansatz für eine Teilbruchzerlegung zu modifizieren.

Beispiel: Gegeben sei die Funktion zu $f(x)=\frac{4x^2+3x-1}{(x+2)(x-1)^2}$, $x \neq -2$, $x \neq 1$.

Zerlegen Sie die Funktion mit Hilfe des Ansatzes $f(x)=\frac{a}{x+2}+\frac{b}{x-1}+\frac{c}{(x-1)^2}$ in Teilbrüche und bestimmen Sie anschließend eine Stammfunktion von f.

Lösung:
Der Linearfaktor (x–1) tritt im Nenner zweifach auf, erscheint also als Potenz zweiter Ordnung. Dies wird im Ansatz für die Teilbruchzerlegung wie in der Aufgabenstellung angegeben berücksichtigt. Davon abgesehen gehen wir in völliger Analogie zum vorherigen Beispiel vor.

$$\frac{4x^2+3x-1}{(x+2)(x-1)^2} = \frac{a}{x+2}+\frac{b}{x-1}+\frac{c}{(x-1)^2}$$ **Ansatz für eine Teilbruchzerlegung**

$$4x^2+3x-1 = a(x-1)^2+b(x+2)(x-1)+c(x+2)$$ **Multiplikation mit dem Hauptnenner $(x+2)(x-1)^2$**

$$4x^2+3x-1 = (a+b)\cdot x^2+(-2a+b+c)\cdot x+(a-2b+2c)$$ **Ordnen nach Potenzen von x**

$$\begin{aligned} 4 &= a+b \\ 3 &= -2a+b+c \\ -1 &= a-2b+2c \end{aligned}$$ **Koeffizientenvergleich/ lineares Gleichungssystem**

$$a=1,\ b=3,\ c=2$$ **Lösung des lin. Gleichungssystems**

$$f(x) = \frac{1}{x+2}+\frac{3}{x-1}+\frac{2}{(x-1)^2}$$ **Teilbruchzerlegung von f**

$$F(x) = \ln|x+2|+3\cdot\ln|x-1|-\frac{2}{x-1}$$ **Stammfunktion von f**

Übung 17

Bestimmen Sie die Teilbruchzerlegung von f sowie eine Stammfunktion von f.

a) $f(x)=\frac{6x^2-5x+2}{(x+2)(x-1)^2}$ b) $f(x)=\frac{4x^2+6x-4}{(x-3)(x+2)^2}$ c) $f(x)=\frac{5x^2-24x+36}{x(x-3)^2}$

Typ 3: Der Nenner enthält quadratische Faktoren ohne reelle Nullstellen.

Nicht jedes Polynom lässt sich, wie in den vorhergehenden Beispielen, in ein Produkt aus Linearfaktoren zerlegen. Dann aber lässt es sich, wie im folgenden Beispiel, in ein Produkt aus Linearfaktoren und quadratischen Faktoren zerlegen.

Beispiel: Bestimmen Sie eine Stammfunktion von $f(x) = \frac{2x^2-3x+4}{x^3-2x^2+2x}$.

Lösung:

Nennerterm : $x^3-2x^2+2x = x(x^2-2x+2)$. — **Zerlegung des Nenners in Faktoren**

$x^2-2x+2 = 0$ hat keine reellen Lösungen,

denn $x_{1/2} = 1 \pm \sqrt{1-2} \notin \mathbb{R}$.

Ansatz: $\frac{2x^2-3x+4}{x^3-2x^2+2x} = \frac{a}{x} + \frac{bx+c}{x^2-2x+2}$ — **Ansatz einer Teilbruchzerlegung beim Auftreten quadratischer Faktoren**

Der Zähler des Teilbruchs mit dem quadratischen Nenner muss als linearer Term angesetzt werden.

$2x^2-3x+4 = a(x^2-2x+2) + (bx+c)\cdot x$ — **Multiplikation mit dem Hauptnenner**

$2x^2-3x+4 = (a+b)x^2 + (c-2a)x + 2a$ — **Ordnen nach Potenzen**

$$\begin{aligned} 2 &= a+b \\ -3 &= -2a+c \\ 4 &= 2a \end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich / lineares Gleichungssystem

$a = 2,\; b = 0,\; c = 1$ — **Lösung des Gleichungssystems**

$f(x) = \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2-2x+2}$ — **Teilbruchzerlegung**

$\int \frac{2}{x}dx = 2\cdot \ln|x| + C$ — **Integration der Teilbrüche**

$$\int \frac{1}{x^2-2x+2}dx = \int \frac{1}{(x-1)^2+1}dx = \int \frac{1}{u^2+1}du$$

$$= \arctan u + C = \arctan(x-1) + C$$

$F(x) = 2\cdot \ln|x| + \arctan(x-1) + C$ — **Stammfunktion von f**

Übung 18

Errechnen Sie die folgenden unbestimmten Integrale.

a) $\int \frac{2x^2+5x+2}{x^3+x}dx$ b) $\int \frac{x^2+3x+5}{x^3+2x^2+5x}dx$ c) $\int \frac{2x^4+7x+1}{x^3+x^2-2}dx$

Die bei der Integration eines Teilbruchs mit quadratischem Nenner auftretenden Schwierigkeiten und ihre Überwindung werden im folgenden Beispiel aufgezeigt.

Beispiel: Gesucht ist eine Stammfunktion von $f(x)=\frac{8x+5}{2x^2+x+1}$.

Lösung:
Wir spalten zunächst einen Term ab, dessen Zähler die Ableitung 4x+1 des Nenners ist, um durch logarithmische Integration vereinfachen zu können.

$$\int\frac{8x+5}{2x^2+x+1}dx=\int\frac{2(4x+1)+3}{2x^2+x+1}dx=2\int\frac{4x+1}{2x^2+x+1}dx+3\int\frac{1}{2x^2+x+1}dx=2\ln|2x^2+x+1|+3\int\frac{1}{2x^2+x+1}dx$$

Das nun noch verbleibende Restintegral muss durch eine geeignete Substitution auf die "Arkus-Tangens-Form" $\int\frac{1}{v^2+1}dv$ gebracht werden. Dazu formen wir zunächst um:

$$\frac{1}{2x^2+x+1}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2+\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(x+\frac{1}{4})^2+\frac{7}{16}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{16}{7}\cdot\frac{1}{\frac{16}{7}(x+\frac{1}{4})^2+1}=\frac{8}{7}\cdot\frac{1}{[\frac{4}{\sqrt{7}}(x+\frac{1}{4})]^2+1}\,.$$

Nun substituieren wir $v=\frac{4}{\sqrt{7}}(x+\frac{1}{4})$, $dv=\frac{4}{\sqrt{7}}dx$ und erhalten:

$$\int\frac{1}{2x^2+x+1}dx=\frac{8}{7}\cdot\int\frac{1}{v^2+1}\cdot\frac{\sqrt{7}}{4}dv=\frac{2}{\sqrt{7}}\cdot\arctan v+C=\frac{2}{\sqrt{7}}\cdot\arctan(\frac{4}{\sqrt{7}}(x+\frac{1}{4}))+C.$$

Als Gesamtresultat ergibt sich: $\int\frac{8x+5}{2x^2+x+1}dx=2\cdot\ln|2x^2+x+1|+\frac{6}{\sqrt{7}}\cdot\arctan(\frac{4}{\sqrt{7}}(x+\frac{1}{4}))+C.$

Übungen

Übung 19
Berechnen Sie eine Stammfunktion von f (Teilbruchzerlegung, Typ 1, 2).

a) $f(x)=\frac{14-2x}{(x-2)(x+3)}$ b) $f(x)=\frac{2x-2}{x^2-2x}$ c) $f(x)=\frac{3x^2+x-3}{x^2(x-1)}$

d) $f(x)=\frac{3x+15}{x(x+3)}$ e) $f(x)=\frac{6x^2-3x-1}{x^2(x-1)}$ f) $f(x)=\frac{4x^2-9x-4}{x(x-1)(x+2)}$

g) $f(x)=\frac{4x+5}{x^2+x-2}$ h) $f(x)=\frac{2x^2-8x+16}{(x-4)^2\cdot x^2}$ i) $f(x)=\frac{3x+5}{x^3+4x^2-5x}$

Übung 20
Gesucht ist das unbestimmte Integral (Teilbruchintegration, Typ 3).

a) $\int\frac{2x^2+9x+8}{x^3+2x^2+4x}dx$ b) $\int\frac{x^2+4x-3}{(x-1)(x^2+1)}dx$ c) $\int\frac{4x+6}{x^2+4x+5}dx$

d) $\int\frac{8x+1}{4x^2+8x+8}dx$ e) $\int\frac{6x^2+3x+1}{2x^3+x^2+x}dx$ f) $\int\frac{3x^2-x+8}{(x-1)(x^2+4)}dx$